

確率・統計学 (春学期) 期末試験

【問 1】, 【問 2】は別々の解答用紙に解答せよ.

解答用紙 2 枚に学籍番号と名前の記入を忘れないようにすること.

単純ミスがあっても途中点を与えられるように, 考え方の筋道が分かるように解答すること.

【問 1】 1 から N までの数字が印刷された野球場の入場券があり, 等しい確率で無作為に入場券を抽出する試行を母集団とする. そして, 入場券に書かれている数字を確率変数 X とする. 以下の問に答えよ.

- (1) 母平均 μ と母分散 σ^2 を求めよ.
(Hint) 以下の公式を用いても良い.

$$\sum_{x=1}^n x^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

- (2) 入場券を n 枚抽出したときの標本平均 $\bar{X}$ と分散 $(\bar{X} - \mu)^2$ の期待値が, μ と σ^2 を用いて, 次のように与えられることを示せ.

$$E[\bar{X}] = \mu, \quad E[(\bar{X} - \mu)^2] = \frac{\sigma^2}{n}$$

- (3) (2) における標本分散の期待値 $E[S^2]$ を求めよ. 答えは, N と n を用いて表すこと.
(4) ある日の野球の試合でランダムに入場者を 30 名選び, 入場券に記載されている数字の総和を求めたら 120,000 であった. この日の入場者数を求めよ.

【問 2】 以下の問に答えよ. 必要に応じて, 以下の事実を用いてよい.

標準正規分布 $N(0, 1)$ において, $P(|Z| \leq z) = 0.95$ となる z は 1.96 である.

- (1) ある母集団から大きさ 6 の標本を無作為抽出したとき, 標本平均が a , 標本分散が b^2 であった. 母平均および母分散の不偏推定量を求めよ.
(2) 確率分布

$$f(x) = (1-q)q^x \quad (x = 0, 1, 2, \dots)$$

をもつ母集団に関して n 回の実験を行った結果, それらの値が $x_1, x_2, \dots, x_n$ が得られたとする. 母数 q の最尤推定量を求めよ. ここで, $0 \leq q \leq 1$ である.

- (3) 母分散 σ^2 が 4 で, 大きさが 8 の標本が 10, 14, 10, 12, 8, 11, 12, 11 であったとする. 正規母集団の平均に対する信頼水準が 95% となる信頼区間を求めよ.
(4) 正の実数 x を取る確率を考える. このとき, 母集団の確率分布はつぎのように与えられるとする.

$$f(x) = \frac{1}{\beta} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) \quad (x > 0)$$

ここで, β は正の実定数である. この母集団から大きさ n の標本が与えられたとする. 数値 β がその標本のなかに含まれる確率が 95% となるような標本平均 $\bar{X}$ の区間を求めよ. ただし, 標本の大きさは十分に大きいものとする.

【問 1】

(1)

$$\begin{aligned}\mu &= E[X] = \sum_{x=1}^N x \frac{1}{N} = \frac{1}{2}(N+1) \\ \sigma^2 &= E[(X-\mu)^2] = E[X^2] - \mu^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{x=1}^N x^2 - \frac{1}{4}(N+1)^2 = \frac{1}{12}(N+1)(N-1)\end{aligned}$$

(2)

$$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$$

であり, 抽出する各試行は独立だから, $E[X_1] = E[X_2] = \cdots = E[X_n]$ である. よって,

$$E[\bar{X}] = \frac{1}{n}(\mu + \cdots + \mu) = \mu$$

$$(\bar{X} - \mu)^2 = \frac{1}{n^2} \left\{ (X_1 - \mu)^2 + (X_2 - \mu)^2 + \cdots + (X_n - \mu)^2 \right\} + (\text{cross terms})$$

$E[(X_i - \mu)(X_j - \mu)] = 0 \quad (i \neq j)$ を用いて,

$$E[(\bar{X} - \mu)^2] = \frac{1}{n^2} n \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

(3)

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2$$

となるから,

$$\begin{aligned}E[S^2] &= \frac{1}{n} n E[X^2] - E[\bar{X}^2] = (\sigma^2 + \mu^2) - \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 \right) \\ &= \frac{n-1}{n} \sigma^2 = \frac{n-1}{n} \frac{1}{12} (N+1)(N-1)\end{aligned}$$

(4) $n = 30$ の場合であるから, 総和は $n\bar{X} = 30\bar{X}$ で与えられる.

$$E[n\bar{X}] = 120,000$$

ということだから, $E[\bar{X}] = \mu = 4,000$ となる.

(1) より, $\mu = (N+1)/2$ を用いて,

$$N = 7999 \approx 8000$$

【問2】

- (1) $E[\bar{X}] = \mu$ より, 母平均の不偏推定量は a .
 $E[S^2] = \frac{n-1}{n}\sigma^2$ より, 母分散の不偏推定量は $\frac{n}{n-1}b^2 = \frac{6}{5}b^2$
- (2) 母数 q に対する尤度関数 $L(q)$ は

$$L(q) = (1-q)q^{x_1} \cdot (1-q)q^{x_2} \cdots (1-q)q^{x_n} = (1-q)^n q^{x_1 + \cdots + x_n}$$

となる. 従って, 最尤推定値では

$$\frac{\partial L(q)}{\partial q} = 0$$

より,

$$q = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n + x_1 + \cdots + x_n}$$

- (3) 標本平均は $\bar{X} = 11$ となる.
 標本平均は $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) = N\left(\mu, \frac{4}{8}\right)$ の正規分布に従うから,

$$P\left(\left|\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| \leq z\right) = P\left(\left|\frac{11 - \mu}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right| \leq z\right) = 0.95$$

となる. $z = 1.96$ となるから,

$$11 - \frac{1.96}{\sqrt{2}} \leq \mu \leq 11 + \frac{1.96}{\sqrt{2}} \Rightarrow 9.6 \leq \mu \leq 12.4$$

- (4) 与えられた確率密度から, 母平均と母分散を求めると,

$$E[X] = \int_0^\infty dx x \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} = \beta,$$

$$E[X^2] = \int_0^\infty dx x^2 \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} = 2\beta^2$$

これから, 母平均と母分散はそれぞれ β と β^2 となる.

標本の大きさは十分に大きいとしているから, 中心極限定理より, 標本平均 $\bar{X}$ は $N\left(\beta, \frac{\beta^2}{n}\right)$ の正規分布に従う. β は母平均であるから, β が標本のなかに含まれる確率が 95%となるのは,

$$P\left(\left|\frac{\bar{X} - \beta}{\frac{\beta}{\sqrt{n}}}\right| \leq z\right) = 0.95$$

となる. よって,

$$\beta\left(1 - \frac{1.96}{\sqrt{n}}\right) \leq \bar{X} \leq \beta\left(1 + \frac{1.96}{\sqrt{n}}\right)$$