平成 25 年 6 月 12 日（水） 第５限

# 確率・統計学 （春学期） 中間試験

【問１】、【問２】は**別々の解答用紙**に解答せよ。
解答用紙**２枚**に**学籍番号**と**名前**の記入を忘れないようにすること。
単純ミスがあっても途中点を与られるように、考え方の筋道が分かるように解答すること。

【問１】 確率変数 $X$ に対する確率密度が、つぎのように与えられている。

$$f(x) = ce^{-|x|}$$

ここで、$x$ は実数で、$x \in (-\infty, \infty)$ である。また、$c$ は実定数である。

(1) $f(x)$ が確率密度となるように $c$ を求めよ。

(2) $f(x)$ の特性関数 $F(k)$ を求めよ。ただし、特性関数 $F(k)$ は

$$F(k) = E\left[e^{ikX}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{ikx} f(x)$$

で定義されるものとする。

(3) 特性関数 $F(k)$ を用いて、$f(x)$ の平均 $\mu$ と分散 $\sigma^2$ を求めよ。

(4) 確率変数を $Z = X^2$ によって変換したときの $Z$ に対する確率密度を $g(z)$ とする。$g(z)$ を求めよ。ここで、$z \geqslant 0$ とする。

【問２】 以下の問に答えよ。

(1) 平均 $\mu$、分散 $\sigma^2$ をもつ確率変数 $X$ に対する正規分布 $f(x)$ を書き下せ。

(2) 確率変数 $X$ に対するポアソン分布

$$p(x) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}, \quad (x = 0, 1, 2, \cdots)$$

の平均および分散が $\mu$ で与えられることを示せ。

(3) $\mu = np$ を一定のもと、$n \to \infty$ かつ $p \to 0$ の極限で、２項分布 $g(x)$ からポアソン分布を導出せよ。ここで、確率変数 $X$ に対する２項分布は

$$g(x) = {}_nC_x\, p^x (1-p)^{n-x}, \quad (x = 0, 1, \cdots, n)$$

で与えられる。

確率・統計学（春学期） 中間試験 [解答例]

【問１】

(1) 規格化条件を用いて、

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}dx\,f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}dx\,ce^{-|x|}=2c\int_{0}^{\infty}dx\,e^{-x}=2c$$

より、$c=1/2$.

(2)

$$\begin{aligned}F(k)=\int_{-\infty}^{\infty}dx\,e^{ikx}f(x)=&\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}dx\,e^{ikx}e^{-x}+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}dx\,e^{ikx}e^{x}\\=&\frac{1}{2}\frac{1}{1-ik}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+ik}=\frac{1}{1+k^2}\end{aligned}$$

(3)

$$\mu=E\left[X\right]=\left.\frac{1}{i}\frac{\partial F(k)}{\partial k}\right|_{k=0}=0$$

$$\sigma^2=E\left[X^2\right]-\mu^2=E\left[X^2\right]=-\left.\frac{\partial^2 F(k)}{\partial k^2}\right|_{k=0}=2$$

(4)

$$g(z)=\int_{-\infty}^{\infty}dxf(x)\delta\left(z-x^2\right)=\int_{-\infty}^{\infty}dxf(x)\delta\left(x^2-z\right)$$

$$\xi(x)=x^2-z$$

とすれば、$\xi(x)=0$ から、$x=\pm\sqrt{z}$

さらに、

$$\left.\frac{d\xi}{dx}\right|_{x=\pm\sqrt{z}}=\left.2x\right|_{x=\pm\sqrt{z}}=\pm2\sqrt{z}$$

を用いて、

$$\begin{aligned}g(z)=&\int_{-\infty}^{\infty}dxf(x)\left\{\frac{1}{|2\sqrt{z}|}\delta\left(x-\sqrt{z}\right)+\frac{1}{|-2\sqrt{z}|}\delta\left(x-\sqrt{z}\right)\right\}\\=&\frac{1}{2\sqrt{z}}\left\{f\left(\sqrt{z}\right)+f\left(-\sqrt{z}\right)\right\}=\frac{1}{2\sqrt{z}}e^{-\sqrt{z}}\end{aligned}$$

（別解）

$z=x^2$ から、$x=\pm\sqrt{z}$ となるから、同一の $z$ に対して同じ値を与える $x$ が二つある。

$$g(z)dz=\left\{f(x)+f(-x)\right\}dx=2f\left(\sqrt{z}\right)dx$$

よって、

$$g(z)=2f\left(\sqrt{z}\right)\frac{dx}{dz}=\frac{1}{2\sqrt{z}}e^{-\sqrt{z}}$$

【問２】

(1)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

(2)

$$E[X] = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu} = e^{-\mu} \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\mu^x}{x!} = e^{-\mu} \mu e^{\mu} = \mu$$

同様に、

$$E\left[X^2\right] = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu} = e^{-\mu} \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\mu^x}{x!} = \mu + \mu^2$$

よって、分散 $\sigma^2 = E\left[X^2\right] - \mu^2 = \mu$

(3) Quiz 2 の解答を参照。