平成 26 年 2 月 10 日（月） 第 2 限

統計力学　（秋学期） 期末試験

【問１】,【問２】は**別々の解答用紙**に解答せよ.
解答用紙**２枚**に**学籍番号**と**名前**の記入を忘れないようにすること.
単純ミスがあっても途中点を与えられるように, 考え方の筋道が分かるように解答すること.

問 1 相互作用の無いスピン 0 の自由粒子からなる理想 Bose 気体を考える。

(1) 温度 τ で平衡状態にある Bose 気体の粒子数 N が、次式で与えられることを示せ。

$$N = V\frac{(2m)^{3/2}}{4\pi^2\hbar^3}\int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^{1/2}}{z^{-1}e^{\frac{\varepsilon}{\tau}}-1} + \frac{z}{1-z}$$

ここで、m は Bose 粒子の質量、V は体積、$\hbar$ はプランク定数を 2π で割った定数、τ はエネルギーの単位を持つ温度、μ は化学ポテンシャル、$z = \exp(\mu/\tau)$ である。また、Bose 粒子の基底状態のエネルギーを原点（$\varepsilon = 0$）とした。

(2) (1) で導出した式の第一項を N_e と書けば、

$$N_e = V\frac{(2m)^{3/2}}{4\pi^2\hbar^3}\int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^{1/2}}{z^{-1}e^{\frac{\varepsilon}{\tau}}-1} = V\left(\frac{m\tau}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} g_{3/2}(z)$$

と表すことができる。ここで、$g_{3/2}(z)$ は Bose-Einstein 関数で、（形式的に）つぎのように与えられる。

$$g_{3/2}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty dx \frac{x^{3/2-1}}{z^{-1}e^x - 1} = z + \frac{z^2}{2^{3/2}} + \frac{z^3}{3^{3/2}} + \cdots$$

N_e が上に有界であることを示せ。
なお、解答にはつぎの Riemann zeta 関数を用いて良い。

$$\zeta\left(\frac{3}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2^{3/2}} + \frac{1}{3^{3/2}} + \cdots$$

(3) Einstein 凝縮温度 τ_E を、Riemann zeta 関数 $\zeta\left(\frac{3}{2}\right)$ を用いて表せ。

(4) Einstein 凝縮の起こる物理機構を簡単に説明せよ。

問 2 ランダウ理論を用いて、強磁性体の 2 次の相転移を考える。

(1) ランダウの自由エネルギー F_L が

$$F_L(M;\tau) = g_0(\tau) + \frac{1}{2}g_2(\tau)M^2 + \frac{1}{4}g_4(\tau)M^4$$

で与えられるとする。ここで、$g_0(\tau)$, $g_2(\tau)$, $g_4(\tau)$ は温度 τ をパラメータとする定数，M は秩序パラメータの磁化である。
F_L は、M についての偶関数であり、$g_4(\tau) > 0$ であることを説明せよ。

(2) F_L に含まれる $g_2(\tau)$ が、つぎのように書けることを説明せよ。

$$g_2(\tau) = \alpha(\tau - \tau_c)$$

ここで、α は正の定数、τ_c はキュリー温度である。

(3) 平衡状態での F_L に対する（必要）条件を書け。この条件を用いて、平衡状態における磁化 M の値を $g_0(\tau)$、$g_2(\tau)$ および $g_4(\tau)$ を用いて表せ。

(4) 縦軸を平衡状態におけるランダウの自由エネルギー F_L、横軸を温度 τ にして、$\tau > 0$ の領域で F_L のグラフを示せ。