

統計力学 II (1 学期) Take-Home Exam

今日 (6 月 20 日) 配布した解答用紙に各大問を別々に解答せよ。

解答用紙 **3 枚**に**学籍番号**と**名前**の記入のうえ、解答用紙の左上をホッチキスでとめて提出すること。

提出期限: **6 月 29 日 (金) 5 pm**

提出場所: A 棟 2F 支援室のレポート提出ボックス

問 1 縮退していない一つのエネルギー準位 ε に着目して、相互作用の無い理想気体の量子統計と古典統計を考える。尚、(1) および (2) については、化学ポテンシャルを μ 、エネルギーの単位を持つ温度を $\tau (= k_B T)$ としたうえで、講義で説明したようにグランドカノニカル・アンサンブルを想定して解くこと。

- (1) 理想気体の粒子がフェルミ粒子であるとき、エネルギー準位 ε における粒子の平均占有数 $\langle N(\varepsilon) \rangle \equiv f(\varepsilon)$ が Fermi-Dirac 統計分布で与えられることを示せ。
- (2) 理想気体の粒子がボーズ粒子であるとき、エネルギー準位 ε における粒子の平均占有数 $\langle N(\varepsilon) \rangle \equiv f(\varepsilon)$ が Bose-Einstein 統計分布で与えられることを示せ。
- (3) (1) および (2) の結果を用いて、理想気体の粒子が古典粒子とみなせるとき、エネルギー準位 ε における粒子の平均占有数 $\langle N(\varepsilon) \rangle \equiv f(\varepsilon)$ が Maxwell-Boltzmann 統計分布で与えられることを示せ。
- (4) エネルギー準位 ε における平均占有数の分散を $\langle \Delta N^2 \rangle \equiv \langle N(\varepsilon)^2 \rangle - \langle N(\varepsilon) \rangle^2$ で定義する。理想気体が量子統計に従うとき、平均占有数の分散は

$$\langle \Delta N^2 \rangle = f(\varepsilon) [1 \mp f(\varepsilon)]$$

となることを示せ。ここで、上 (下) の符号はフェルミ (ボーズ) 粒子を表す。

問 2 相互作用の無い理想 Bose 気体の Einstein 凝縮温度 τ_E を、以下の手順で求めよ。

- (1) 温度 τ で平衡状態にあるスピン 0 の Bose 気体の粒子数 N が、次式で与えられることを示せ。

$$N = V \frac{(2m)^{3/2}}{4\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^{1/2}}{z^{-1} e^{\varepsilon/\tau} - 1} + \frac{z}{1-z}$$

ここで、ここで、 τ をエネルギーの単位を持つ温度、 μ を化学ポテンシャルとして、 $z = \exp(\mu/\tau)$ である。また、 m は Bose 粒子の質量、 V は体積、 $\hbar$ は 2π で割ったプランク定数である。

- (2) (1) で導出した式の第一項を N_e と書けば、以下のような不等式が成立することを示せ。

$$N_e \leq V \left(\frac{m\tau}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \left(1 + \frac{1}{2^{3/2}} + \frac{1}{3^{3/2}} + \cdots \right) = V \left(\frac{m\tau}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \zeta \left(\frac{3}{2} \right)$$

ここで、 $\zeta \left(\frac{3}{2} \right)$ は Riemann zeta 関数である。

- (3) Einstein 凝縮温度 τ_E を、Riemann zeta 関数 $\zeta \left(\frac{3}{2} \right)$ を用いて表せ。

問3 以下の問に答えよ。尚、粒子の種類は1種類のみで、可逆過程のみを考える。記号は教科書および講義での表式に従うものとする。

- (1) 内部エネルギー U が示量変数であることから、次の熱力学の基本方程式を導け。

$$U(\sigma, V, N) = \tau\sigma - pV + \mu N$$

ここで、 τ は（エネルギーの次元をもった）温度、 σ は（無次元の）エントロピー、 p は圧力、 V は体積、 μ は化学ポテンシャル、 N は粒子数である。

- (2) (1) と熱力学の第一法則（エネルギー保存則）から、次のギブス - デュエム（Gibbs-Duhem）の関係式を導け。

$$d\mu = -\frac{\sigma}{N}d\tau + \frac{V}{N}dp$$

- (3) ギブスの自由エネルギー G の定義を与えたうえで、 $G = \mu N$ となることを示せ。

- (4) ヘルムホルツの自由エネルギー F の定義を与えたうえで、可逆過程のもとでは

$$dF = -\sigma d\tau - pdV + \mu dN$$

となることを示せ。

- (5) 次のマックスウェルの関係式を導出せよ。

$$\left(\frac{\partial\sigma}{\partial V}\right)_{\tau,N} = \left(\frac{\partial p}{\partial\tau}\right)_{V,N}, \quad \left(\frac{\partial\sigma}{\partial N}\right)_{\tau,V} = -\left(\frac{\partial\mu}{\partial\tau}\right)_{N,V}, \quad \left(\frac{\partial\mu}{\partial V}\right)_{N,\tau} = -\left(\frac{\partial p}{\partial N}\right)_{V,\tau}$$