

応用理工学類 統計力学 II (秋学期)

Homework 1

締切 : 10 月 27 日 (木) の講義開始時刻

問 1(50) この問題では理想気体の熱力学関数 S を**カノニカル集団**を用いて求める。

体積 V の容器内に N 個の単原子分子からなる理想気体が閉じ込められており、容器が温度 T の熱浴に接して気体は熱平衡状態にあるとする。気体分子の全エネルギーを E 、ボルツマン定数を k_B として、以下の問いに答えよ。

- (1) 質量 m の 1 個の気体粒子 (単原子分子) の準位 s のエネルギーを ε_s として、この粒子に対する分配関数 Z_1 を求めよ。ここで、気体粒子のスピンを無視すれば、分配関数 Z_1 は以下の式で求まる。

$$Z_1 = \sum_s e^{-\frac{\varepsilon_s}{k_B T}}$$

- (2) N 個の気体粒子に対する分配関数 Z_N は

$$Z_N = \frac{Z_1^N}{N!}$$

で求まる。うへの式に含まれる $N!$ の物理的意味を述べよ。 $N!$ で割らないとどのような矛盾が出てくるか、述べよ。さらに、この気体に対する Helmholtz の自由エネルギー $F(T, V, N)$ を求めよ。

- (3) 気体に対するエントロピー $S(E, V, N)$ を求めよ。変数 (E, V, N) で表すことに注意すること。

問 2(50) この問題では理想気体の熱力学関数 S を**ミクロカノニカル集団**を用いて求める。

体積 V の容器内に N 個の単原子分子からなる理想気体が閉じ込められており、容器は外界と絶縁されて孤立しているとする。気体分子の全エネルギーを E として、以下の問いに答えよ。

古典的な 2 次元位相空間 (x, p) では、体積 h (プランク定数) 当たり到一个の量子状態が対応している。つまり、2 次元位相空間の微小体積素片 $dx dp$ には $dx dp/h$ 個の状態が含まれる。同様に、 N 個の粒子に対する $6N$ 次元位相空間での体積素片には $d^3 r_1 d^3 p_1 \cdots d^3 r_N d^3 p_N / h^{3N}$ 個の状態が含まれる。このことをふまえて、以下の問いに答えよ。

- (1) N 個の気体粒子 (単原子分子) のエネルギーが E 以下の全状態数 $W(E)$ は、

$$\begin{aligned} W(E) &= \int_{\frac{1}{2m}(\mathbf{p}_1^2 + \cdots + \mathbf{p}_N^2) \leq E} \frac{d^3 r_1 d^3 p_1 \cdots d^3 r_N d^3 p_N}{h^{3N}} = \frac{V^N}{h^{3N}} \int_{V_{3N}} dp_1 dp_2 \cdots dp_{3N} \\ &\equiv \frac{V^N}{h^{3N}} V_{3N} \end{aligned}$$

で求めることができる。ここで、 m は気体粒子の質量、 V_{3N} は半径 $\sqrt{2mE}$ の $3N$ 次元球の体積を表す。 V_{3N} を求めたうえで、この気体に対する全状態数 $W(E)$ を求めよ。

- (2) 気体粒子 (単原子分子) のエネルギーが $E \sim E + \Delta E$ にあるときの気体粒子の取り得る状態数を $\Omega(E)\Delta E$ と書くと、 $\Omega(E)$ は全状態数 $W(E)$ を用いて

$$\Omega(E) = \frac{\partial W(E)}{\partial E}$$

で求められることを示せ。そのうえで、この気体に対する状態密度 $\Omega(E)$ を求めよ。

- (3) 気体粒子の量子性を考慮すると、正しい状態密度 Ω_{QM} は

$$\Omega_{QM}(E) = \frac{\Omega(E)}{N!}$$

となる。量子補正した状態密度 $\Omega_{QM}(E)$ を用いて、気体に対するエントロピー $S(E, V, N)$ を求めよ。問 1 の結果と一致することを示せ。